Funcții, ecuații funcționale

Matematică - Expresii, polinoame și funcții

www.enciclopul.ro

1 Definiții și proprietăți elementare

Definiția 1. *Fie A și B două mulțimi nevide. O corespondență $f : A \to B$ se numește **funcție** dacă și numai dacă $(\forall)\ x \in A$, $(\exists!)\ y \in B$ pentru care $f(x) = y$.*

Definiția 2. *Dacă avem o funcție $f : A \to B$, mulțimea A se numește **domeniul** funcției f, iar mulțimea B se numește **codomeniul** funcției f.*

Definiția 3. *Dacă avem o funcție $f : A \to B$ și $f(x) = y$, elementul y se numește imaginea lui x și se notează $y = \operatorname{Im} x$.*

Definiția 4. *Dacă avem o funcție $f : A \to B$ și M o submulțime a lui A. Definim submulțimea lui B: $N = \{y \in B \mid y = f(x), x \in A\}$. Această submulțime se numește imaginea lui M și se notează $N = \operatorname{Im} M$.*

Definiția 5. *Dacă avem o funcție $f : A \to B$ și submulțimea lui B notată $C = \operatorname{Im} A$, atunci această submulțime se numește imaginea funcției f și se notează $C = \operatorname{Im} f$.*

Proprietatea 1. Pentru o $f : A \to B$, sunt adevărate relațiile:

(a) $(\forall)\ M \subseteq A$, $\operatorname{card} M \geq \operatorname{card} \operatorname{Im} M$;

(b) $(\forall)\ M \subseteq A$, cu $\operatorname{card} \operatorname{Im} M = \infty$, avem $\operatorname{card} M = \infty$ (notația $\operatorname{card} X = \infty$ înseamnă că mulțimea X este infinită);

(c) $(\forall)\ M \subseteq A$, avem $\operatorname{Im} M \cap B = \operatorname{Im} M$ și $\operatorname{Im} M \cup B = B$;

(d) $\operatorname{card} A \geq \operatorname{card} \operatorname{Im} f$ și $\operatorname{card} B \geq \operatorname{card} \operatorname{Im} f$;

(e) $\operatorname{Im} f \cap B = \operatorname{Im} f$ și $\operatorname{Im} f \cup B = B$.

Definiția 6. *Definim funcția $\operatorname{Id} A : A \to A$ funcția identitate, cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A$, $f(x) = x$.*

Definiția 7. *Definim funcția $\operatorname{Nl} A : A \to \{0\}$ funcția nulă, cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A$, $f(x) = 0$.*

Definiția 8. *Pentru o funcție $f : A \to B$, definim funcția opusă, $g : A \to (-1) \cdot B$, cu proprietatea că $g(x) = -f(x), (\forall)\ x \in A$. Notăm $g = -f$. Am notat $n \cdot X = Y$, dacă și numai dacă $Y = \{y \mid y = nx,\ x \in X\}$.*

2 Operații cu funcții

Definiția 9. *Fie $f : A \to B$ și $g : A \to C$ două funcții. Definim suma celor două funcții $h : A \to B + C$, cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A$, $h(x) = f(x) + g(x)$. Notăm suma a două funcții $h = f + g$. Notația folosită pentru mulțimi $X + Y$ reprezintă mulțimea $Z = \{z \mid z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$.*

Proprietatea 2. Suma unor funcții definite pe A are următoarele proprietăți:

(a) $f + g = g + f$;

(b) $(f + g) + h = f + (g + h)$;

(c) $f + \mathrm{Nl}\, A = \mathrm{Nl}\, A + f = f$.

(d) $f + (-f) = \mathrm{Nl}\, A$.

Definiția 10. *Fie $f : A \to B$ și $g : A \to C$ două funcții. Definim diferența celor două funcții $h : A \to B - C$, cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Notăm suma a două funcții $h = f - g$. Notația folosită pentru mulțimi $X - Y$ reprezintă mulțimea $Z = \{z \mid z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}$.*

Proprietatea 3. Diferența unor funcții definite pe A are următoarele proprietăți:

(a) $f - g = -(g - f)$;

(b) $f - g - h = f - (g + h)$;

(c) $f - g = f + (-g)$;

(d) $f - \mathrm{Nl}\, A = -(\mathrm{Nl}\, A - f) = f$;

(e) $f - f = \mathrm{Nl}\, A$.

Definiția 11. *Fie $f : A \to B$ și $g : A \to C$ două funcții. Definim produsul celor două funcții $h : A \to B \cdot C$, cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Notăm produsul a două funcții $h = f \cdot g$. Notația folosită pentru mulțimi $X \cdot Y$ reprezintă mulțimea $Z = \{z \mid z = x \cdot y,\ x \in X,\ y \in Y\}$.*

Proprietatea 4. Produsul unor funcții definite pe A are următoarele proprietăți:

(a) $f \cdot g = g \cdot f$;

(b) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$;

(c) $f \cdot \mathrm{Id}\, A = \mathrm{Id}\, A \cdot f = f$;

(d) $f \cdot \mathrm{Nl}\, A = \mathrm{Nl}\, A \cdot f = \mathrm{Nl}\, A$;

Definiția 12. *Fie $f : A \to B$ și $g : A \to C$ două funcții, g nenulă. Definim raportul celor două funcții $h : A \to \frac{B}{C}$, cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A,\ h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$. Notăm raportul a două funcții $h = \frac{f}{g}$. Notația folosită pentru mulțimi $\frac{X}{Y}$ reprezintă mulțimea $Z = \left\{ z \;\middle|\; z = \frac{x}{y},\ x \in X,\ y \in Y \right\}$.*

Proprietatea 5. Raportul unor funcții definite pe A are următoarele proprietăți:

(a) $\frac{f}{g} = h \Leftrightarrow g \cdot h = f \Leftrightarrow \frac{f}{h} = g,\ g,\ h \neq \operatorname{Nl} A$;

(b) $\frac{f}{g} \cdot \frac{g}{f} = \operatorname{Id} A,\ f,\ g \neq \operatorname{Nl} A$;

(c) $\frac{f}{f} = \operatorname{Id} A,\ f \neq \operatorname{Nl} A$

(d) $\frac{f}{\operatorname{Id} A} = f$;

(e) $\frac{\operatorname{Nl} A}{f} = \operatorname{Nl} A,\ f \neq \operatorname{Nl} A$;

Definiția 13. *Fie $g : A \to B$ și $f : B \to C$ două funcții. Definim compunerea celor două funcții $h : A \to C$, cu proprietatea că $(\forall)\ x \in A,\ h(x) = f(g(x)), g(x) \neq 0$. Notăm compunerea a două funcții $h = g \circ f$.*

Proprietatea 6. Compunerea a două funcții are următoarele proprietăți:

(a) $f \circ \operatorname{Id} B = \operatorname{Id} B$;

(b) $f \circ \operatorname{Nl} B = \operatorname{Nl} B$;

(c) $\operatorname{card} \operatorname{Im} g \circ f \leq \operatorname{card} \operatorname{Im} g \leq \operatorname{card} B$;

(d) $\operatorname{card} \operatorname{Im} g \circ f \leq \operatorname{card} \operatorname{Im} f \leq \operatorname{card} C$.

Definiția 14. *Fie $f : A \to B$ o funcție. Dacă există o funcție $g : B \to A$, pentru care $g \circ f = \operatorname{Id} B$, atunci numim g inversa lui f și notăm $g = f^{-1}$.*

Concluzie. Studiind operațiile cu funcții am ajuns la următoarele concluzii importante:

1) Operațiile fundamentale – suma și produsul, ca și derivatele lor, diferența și raportul, funcționează după următoarea schemă, elementul lor comun fiind aplicarea simultană (la același pas) a celor două funcții. **Pornim de la un număr x. Aplicăm simultan cele două funcții f și g lui x și obținem două numere $\mathbf{y_1}$ și $\mathbf{y_2}$. Printr-o operație algebrică standard, cele două rezultate sunt cumulate pentru a obține un singur rezultat y.**

2) Operația specifică funcțiilor – compunerea – funcționează după o schemă modificată. Cele două funcții sunt aplicate succesiv, nu simultan. **Pornim de la un număr x. Aplicăm funcția g lui x și obținem numărul y. Aplicăm funcția f lui y și obținem rezultatul final, numărul z**.

3 Tipuri de funcții

Definiția 15. *O funcție $f : A \to B$ se numește injectivă, dacă este adevărată relația logică:*

$$(\forall)\ \ a, b \in A,\ \ a \neq b,\ f(a) \neq f(b)$$

Relația se poate rescrie sub formă de echivalență:

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

Definiția 16. *O funcție $f : A \to B$ se numește surjectivă, dacă este adevărată relația logică:*

$$(\forall)\ \ y \in B,\ (\exists!)\ \ x \in A,\ f(x) = y$$

Sau folosind definițiile studiate:

$$\operatorname{Im} f = B$$

Adică funcția acoperă întreg codomeniul.

Definiția 17. *O funcție $f : A \to B$ se numește bijectivă, dacă ea este și injectivă și surjectivă, adică între domeniu și codomeniu există o corespondență $1:1$.*

Teorema 1. O funcție $f : A \to B$ admite o inversă $g : B \to A$, dacă și numai dacă funcția f este bijectivă (adică injectivă și surjectivă).

Demonstrație. $\boxed{\Rightarrow}$ Avem o funcție f cu $g = f^{-1}$. În primul rând, fiindcă f^{-1} este funcție, trebuie ca $f^{-1}(x)$ să fie definită bine, adică să aibă o singură valoare posibilă. Adică funcția f este injectivă, în caz contrar, dacă ar exista $f(a) = f(b) = m$ pentru numere a, b distincte, atunci $f^{-1}(m) = f^{-1}(f(a)) = a$ și $f^{-1}(m) = f^{-1}(f(b)) = b$, contradicție cu statulul de funcție al relației g. În plus, fiindcă g este definită pe B, înseamnă că fiecare valoare $y \in B$, are un corespondent $f^{-1}(y) = x$, prin urmare există un $f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ pentru fiecare y din B, adică f este surjectivă. Prin urmare f este bijectivă.

$\boxed{\Leftarrow}$ Dacă f este bijectivă, atunci între mulțimile A și B există o corespondență $1:1$, prin urmare putem grupa elementele celor două mulțimi în perechi (a_i,b_i). Întorcând perechile (b_i,a_i) și construind o funcție, cu proprietatea $g(b_i) = a_i$ reușim să construim inversa lui f.

Definiția 18. *O funcție $f : A \to B$ se numește monoton crescătoare, dacă și numai dacă, pentru orice $x < y$, $f(x) \leq f(y)$.*

Definiția 19. *O funcție $f : A \to B$ se numește monoton descrescătoare, dacă și numai dacă, pentru orice $x < y$, $f(x) \geq f(y)$.*

Definiția 20. *O funcție $f : A \to B$ se numește strict crescătoare, dacă și numai dacă, pentru orice $x < y$, $f(x) < f(y)$.*

Definiția 21. *O funcție $f : A \to B$ se numește strict descrescătoare, dacă și numai dacă, pentru orice $x < y$, $f(x) > f(y)$.*

Definiția 22. *O funcție $f : A \to B$ se numește monotonă dacă este monoton crescătoare sau descrescătoare.*

Definiția 23. *O funcție $f : A \to B$ se numește strict monotonă dacă este strict crescătoare sau descrescătoare.*

Teorema 2. O funcție strict monotonă este întotdeauna injectivă.

Demonstrație. Notăm o constantă $k = \operatorname{sgn} f(1) - f(0)$. Din monotonie, este adevărat că $\operatorname{sgn} f(b) - f(a) = k$, pentru orice $b > a$. Dar $k \in \{-1; 1\}$, din definiția funcției $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$ și $\operatorname{sgn} 0 = 0$, prin urmare $f(b) \neq f(a)$, dacă $b \neq a$, cu alte vorbe funcția f este injectivă, adică fiecare valoare din codomeniu are cel mult un corespondent în domeniu.

4 Trei ecuații funcționale solicitante

Problema 1. Găsiți toate funcțiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, pentru care este adevărată relația:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

Problema paralelogramului

Soluție. Alegem $x = y = 0$ și obținem:

$$2f(0) = 4f(0)$$

Prin urmare:

$$f(0) = 0$$

Alegem $x = y$ și obținem:

$$f(2x) = 4f(x)$$

Alegem $x = -y$ și obținem:

$$f(2x) = 2f(x) + 2f(-x)$$

Prin urmare:

$$f(x) = f(-x)$$

Se demonstrează prin inducție că, pentru $n \in \mathbb{N}$:

$$f(nx) = f(-nx) = n^2 f(x)$$

Dacă notăm $f(1) = a$, atunci obținem:

$$f(x) = ax^2, \ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Prin urmare, acestea sunt funcțiile care satisfac condiția impusă de problemă.

Problema 2. Găsiți toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care este adevărată relația:

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

Forumurile Art of Problem Solving

Soluție. Alegem $x = y = 0$ și obținem:

$$f(f(0)) = f(0)$$

Alegem $x = 0$ și obținem:

$$f(f(y)) = f(0) + y$$

Obținem că funcția $f \circ f$ este injectivă (strict crescătoare) , prin urmare f este injectivă. Alegem $y = 0$ și obținem:

$$f(x + f(0)) = f(x)$$

Din ultima relație obținem că funcția este periodică de perioadă $T = f(0)$. Dar o funcție injectivă nu poate fi periodică decât de perioadă $T = 0$, prin urmare $f(0) = 0$. Avem relația:

$$f(f(y)) = y$$

O funcție este propria inversă, dacă și numai dacă graficul său are ca simetric față de prima bisectoare $(y = x)$ pe sine însuși. Singurele astfel de funcții sunt $f(x) = x$ și $f(x) = -x$, care sunt și soluțiile ecuației.

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că:

$$x + f(x) = f(f(x))$$

Calculați $f(f(0))$.

Portalul IMOmath

Soluție. Vom demonstra că f este injectivă. Dacă avem $f(a) = f(b)$, este evident că:

$$f(f(a)) = f(f(b))$$

Prin urmare:

$$f(f(a)) - f(a) = f(f(b)) - f(b)$$

Adică:

$$a = b$$

Prin urmare f este injectivă.
Acum avem că:

$$f(f(0)) = f(0)$$

De unde, conform injectivității:

$$f(0) = 0$$

Adică:

$$f(f(0)) = 0$$